

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS.** Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y celulares.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración = 60 minutos

1) [20 pts]

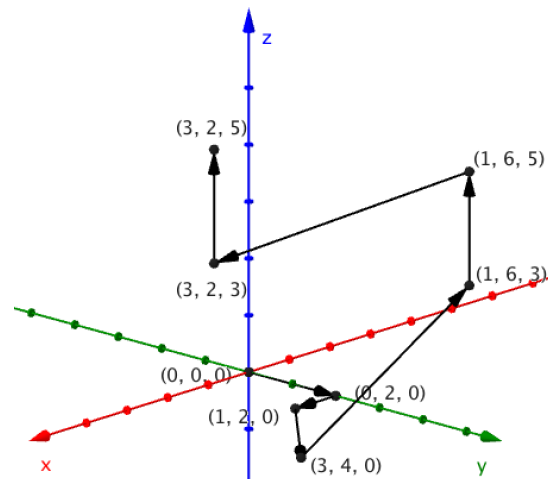
Sea

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^{x-2y+1} + z - y + 1, -2e^{x-2y+1} + z^2 - x - 1, x + 2zy)$$

Calcular

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde C es la curva cuyo punto inicial es $A = (0, 0, 0)$ y el punto final $B = (3, 2, 5)$ como se ilustran en la figura.



2) [15 pts] Sean

- $\vec{F}(x, y, z) = \left(-\frac{y^2}{2}, z, x\right)$ campo vectorial en $\mathbb{R}^3$.
- C la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 2y$.
- $\text{rot}(\vec{F}) = (-1, -1, y)$

Calcular $\oint_C -\frac{y^2}{2} dx + z dy + x dz$, usando el teorema de Stokes.

3) [25 pts] Considere el sólido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \quad 0 \leq z \leq y, \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$$

y sea $\mathcal{S}$ la superficie cerrada que limita a E .

- [15 pts] Calcular **directamente el flujo de salida** del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie cerrada $\mathcal{S}$.
- [10 pts] Calcular el flujo, **usando el teorema de la Divergencia**.

Pauta :

1) $\vec{F}$ es conservativo , pues

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{x-2y+1} + z - y + 1 & -2e^{x-2y+1} + z^2 - x - 1 & x + 2zy \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

5 pts

Busquemos la función potencial f tal que $\vec{F} = \nabla f$, es decir

$$\begin{cases} f_x = e^{x-2y+1} + z - y + 1 \\ f_y = -2e^{x-2y+1} + z^2 - x - 1 \\ f_z = x + 2zy \end{cases}$$

Usemos $f(x, y, z) = e^{x-2y+1} + zx - yx + x + g(y, z) + C_1 \implies f_y = -2e^{x-2y+1} - x + g_y(y, z)$

Así $-2e^{x-2y+1} + z^2 - x - 1 = -2e^{x-2y+1} - x + g_y(y, z) \implies g_y(y, z) = z^2 - 1 \implies g(y, z) = z^2 y - y + h(z)$

Luego $f(x, y, z) = e^{x-2y+1} + zx - yx + x + z^2 y - y + h(z) \implies f_z = x + 2zy + h'(z)$

Así $x + 2zy + h'(z) = x + 2zy \implies h'(z) = 0 \implies h(z) = C$

Entonces $f(x, y, z) = e^{x-2y+1} + zx - yx + x + z^2 y - y + C$

10 pts

Finalmente, por el teorema fundamental, obtenemos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) = f(3, 2, 5) - f(0, 0, 0) = 61 - e$$

5 pts

2)

- Una parametrización para la superficie $z = 2y$ es $r(x, y) = (x, y, 2y)$

3 pts

- $\text{rot}(\vec{F}) = (-1, -1, y)$

- $\vec{n} = (0, -2, 1)$

2 pts

Luego

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_{x^2 + (y-1)^2 \leq 1} (-1, -1, y) \cdot (0, -2, 1) \, dydx \\ &= \iint_{x^2 + (y-1)^2 \leq 1} (2 + y) \, dydx \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} (2 + r \cdot \sin \theta) \cdot r \, dr d\theta = 3\pi \end{aligned}$$

3 + 3 + 3 + 1 pts

3) a) Calculamos el flujo de salida del campo a través de cuatro partes de $\mathcal{S}$, que son

- la parte cilíndrica $\mathcal{S}_1$
- la tapa superior $\mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 \leq 4, z = y \geq 0$ y $x \geq 0$
- el triángulo lateral $\mathcal{S}_3 : \text{contenido en el plano } x = 0, \text{ con } 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq y$
- la base $\mathcal{S}_4 : \text{contenido en el plano } z = 0, \text{ con } x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$

las parametrizaciones e integrales de superficie son:

- $\mathcal{S}_1 : \vec{r}_1(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq z \leq 2 \sin \theta$ y $\vec{n}_1 = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\mathcal{S} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \theta} (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z) \cdot (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0) dz d\theta = 8$$

5 pts

- $\mathcal{S}_2 : \vec{r}_2(x, y) = (x, y, y)$ con $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $\vec{n}_2 = (0, -1, 1)$

$$\iint_{\mathcal{S}_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{R}} (x, y, y) \cdot (0, -1, 1) dx dy = 0$$

donde $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$

3 pts

- $\mathcal{S}_3 : \vec{r}_3(x, y) = (0, y, z)$ y $\vec{n}_3 = (0, 0, 1)$

$$\iint_{\mathcal{S}_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 d\mathcal{S} = - \int_0^2 \int_0^y (0, y, z) \cdot (1, 0, 0) dz dy = 0$$

3 pts

- $\mathcal{S}_4 : \vec{r}_4(x, y) = (x, y, 0)$ y $\vec{n}_4 = (0, 0, 1)$

que tiene la dirección interior al plano (cambiamos el signo). Entonces

$$\iint_{\mathcal{S}_4} \vec{F} \cdot \vec{n}_4 d\mathcal{S} = - \iint_{\mathcal{R}} (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) dz d\theta = 0$$

3 pts

finalmente, el flujo de salida del campo $\vec{F}$ a través de $\mathcal{S}$ es $\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = 8$

1 pts

- b) ■ $\text{div}(\vec{F}) = 3$

1 pts

- Sea $E = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq z \leq r \sin(\theta)\}$

2 pts

$$\begin{aligned} \iiint_E 3 dV &= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{r \sin(\theta)} r dz dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \sin(\theta) dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} 8 \sin(\theta) d\theta \\ &= 8 \end{aligned}$$

2+2+2+1 pts